VERZWEIGUNGEN VON LÖSUNGEN NICHTLINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-ALEXANDERS-UNIVERSITÄT ERLANGEN

VORGELEGT VON

HANS FALCKENBERG
AUS JENA.

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 16. DEZEMBER 1911.

ACAD.
LING KAT
BIBL

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1912.

193

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543504_0104

MEINEM LIEBEN VATER

ZUM 60. GEBURTSTAG DARGEBRACHT.

Verzweigungen von Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen.

Einleitung.

Erhard Schmidt weist in der Einleitung seiner Abhandlung über nichtlineare Integralgleichungen*) darauf hin, daß die dort entwickelten Theoreme eine Anwendung auf die Untersuchung nichtlinearer elliptischer partieller Differentialgleichungen zulassen.

Wir wollen in der vorliegenden Arbeit eine solche Differentialgleichung mit den unabhängigen Variablen ξ und η:

$$\Delta u + \text{sinhyp. } u = \Delta u + u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots = 0$$

behandeln, wobei wir verlangen, daß die Lösung am Rande des zu betrachtenden Gebietes den Wert einer vorgegebenen Funktion $h(\sigma)$ — von genügend kleinem absoluten Betrag — annimmt. Und zwar wollen wir die funktionalen Verzweigungen in der Umgebung der trivialen Lösung $u = 0$ untersuchen. Besondere Berücksichtigung soll auch die Frage nach der *Anzahl der reellen Zweige* der Lösung finden.

Zunächst wird die nichtlineare Differentialgleichung nebst Randbedingung nach der von Hilbert auf lineare Differentialgleichungen angewandten Methode in eine nichtlineare Integralgleichung verwandelt, und wir untersuchen dann nach dem Verfahren von E. Schmidt die funktionalen Verzweigungen der nichtlinearen Integralgleichung. Wir erhalten den Fall eindeutiger Lösbarkeit, wie E. Schmidt gezeigt hat, wenn der Kern derjenigen Integralgleichung, die aus den in *u linearen* Gliedern gebildet wird, keine „Nullösung" hat (der Kern ergibt sich beim Übergang von der Differentialgleichung zur Integralgleichung als Greensche Funktion). Läßt dieser Kern Nullösungen zu, so tritt Verzweigung auf.

Im weiteren Verlauf werden wir die Voraussetzung machen, daß die Randfunktion $h(\sigma)$ in der Form $\mu \cdot h_1(\sigma)$ gegeben ist, wobei μ ein Para-

*) „Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen", III. Teil: „Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen". Math. Annalen Bd. 65, 1908. — Diese Arbeit wird im folgenden stets mit „E. Schmidt l. c." zitiert werden, während ich die übrigen Arbeiten E. Schmidts mit dem Titel zitieren will.

meter ist. Durch die Einführung dieses Parameters spezialisieren wir die Art des Kleinwerdens der Funktion $h(\sigma)$, indem wir zu jedem festen $h_1(\sigma)$ nur den Parameter μ variieren. Bleibt nun bei einem festen $h_1(\sigma)$ der Parameter μ unter einer bestimmten endlichen Grenze, so gelingt es uns durch Differentiation der sogenannten „Verzweigungsgleichungen" nachzuweisen, *daß wir ganz unabhängig von der Anzahl der Nullösungen des soeben erwähnten Kernes stets eine und nur eine reelle Lösung der Integralgleichung in der Nähe der Lösung* 0 *erhalten*, während die Anzahl der Lösungen überhaupt steigt mit der Anzahl der Nullösungen. Der Parameter μ mußte eingeführt werden, weil sich die zu diesem Resultate führenden Schlüsse nicht ohne weiteres auf Funktionen $h(\sigma)$ übertragen lassen, deren Variation nicht spezialisiert ist.

Im Falle des Vorhandenseins nur einer Nullösung erhalten wir nach Einführung des Parameters μ die „Verzweigungsgleichung" in der Form

$$0 = \mu \cdot \varkappa_{01} + \lambda^3 \varkappa_{30} + \mu\lambda^2 \varkappa_{21} + \mu^2 \lambda \varkappa_{12} + \mu^3 \varkappa_{03} + \cdots,$$

wobei λ einen später noch einzuführenden Parameter bedeutet, die Koeffizienten $\varkappa$ aber bestimmte Integrale sind. Aus dieser Gleichung werden wir dann — nach der Transformationstheorie der Kurven, die in der Anwendung bequemer ist als das Puiseuxsche Verfahren — λ nach Potenzen von μ entwickeln. Es werden sich drei Entwickelungen ergeben, die im allgemeinsten Fall nach Potenzen von $\sqrt[3]{\mu}$ fortschreiten. Verlangen wir speziell Entwickelungen nach ganzen Potenzen von μ, so erhalten wir als notwendige Bedingung für die Funktion $h_1(\sigma)$, daß $k_{01} = 0$ ist. Wollen wir aber, daß sämtliche drei Entwickelungen reell werden, so würden wir weitere Bedingungen zwischen den Koeffizienten erhalten, über deren Erfüllbarkeit durch passende Wahl von $h_1(\sigma)$ wir nichts aussagen können. Für die Lösungen der Integralgleichung selbst erhalten wir entsprechend ebenfalls drei Entwickelungen nach Potenzen von μ, wobei die Koeffizienten natürlich Funktionen der Variablen ξ und η sind. Und zwar werden die Entwickelungen dann und nur dann reell und schreiten dann und nur dann nach ganzen Potenzen von μ fort, wenn dies auch bei λ der Fall ist. Dadurch können wir, da wir schon wissen, daß wir nur *eine* reelle Lösung der Integralgleichung erhalten, rückschließend feststellen, daß nur *eine* reelle Entwickelung für λ existiert; auch gelingt es uns zu zeigen, daß die schon erwähnte Bedingung für $h_1(\sigma)$ nicht nur notwendig, sondern sogar hinreichend dafür ist, daß die Entwickelungen nach ganzen Potenzen fortschreiten.

Bei zwei Nullösungen werden wir uns beschränken auf die Betrachtung der allgemeinsten Fälle und schließen deshalb alle Spezialfälle aus, bei n Nullösungen werden wir auf den Gang der Diskussion nur hinweisen.

Im ersten Fall erhalten wir 9, im zweiten 3^n Lösungen, von denen stets eine und nur eine reell sein wird.

Im letzten Paragraphen behandeln wir das spezielle Beispiel, daß die *Randkurve ein Kreis* wird. Hier treten außer dem Fall eindeutiger Lösbarkeit der Fall des Vorhandenseins einer und zweier Nullösungen des Kernes auf.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Randfunktion $h_1(\sigma)$ bei Entwickelungen nach *ganzen Potenzen* von μ erhält in diesem Beispiel eine besonders einfache Gestalt. Sie lautet für den Fall einer einzigen Nullösung, wenn wir einführen

$$h_1(\sigma) = h_2(\varphi):$$

$$\int_0^{2\pi} h_2(\varphi)\, d\varphi = 0;$$

für den Fall zweier Nullösungen $J_\varkappa \cos \varkappa\varphi$ und $J_\varkappa \sin \varkappa\varphi$, wobei die $J_\varkappa$ Besselsche Funktionen von ganzzahligem Index bedeuten, erhalten wir die beiden Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi} h_2(\varphi) \cos \varkappa\varphi\, d\varphi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} h_2(\varphi) \sin \varkappa\varphi\, d\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} (\varkappa = 1, 2 \ldots).$$

Alle unsere Betrachtungen behalten ihre Gültigkeit, wenn wir an Stelle der Funktion sin hyp. u in unsere Differentialgleichung eine nach ganzen Potenzen von u entwickelbare Funktion $\varphi(u)$ einsetzen, von der wir verlangen, daß

$$[\varphi(u)]_{u=0} = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\right]_{u=0} = 0$$

und

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right]_{u=0} \neq 0; \quad \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^3}\right]_{u=0} \neq 0$$

wird.

§ 1.

Verwandlung der zu untersuchenden Differentialgleichung nebst Randbedingung in eine Integralgleichung.*)

Wir gehen aus von der Differentialgleichung:

$$\Delta(u) + \text{sinhyp.}\, u = 0. \qquad \text{I}$$

Dabei bedeutet $\Delta(u)$ eine Abkürzung für

*) Vgl. Hilbert: „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen", Götting. Nachrichten Jahrg. 1904 S. 235 und 236.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\text{sinhyp.}\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots$$

Für diesen letzten Ausdruck schreiben wir als Abkürzung $\varphi(u)$, so daß wir die nichtlineare Differentialgleichung

$$\Delta(u) + \varphi(u) = 0$$

zu behandeln haben.

Dabei habe u auf der ganzen vorzugebenden Randkurve den Wert

$$h(\sigma). \qquad \text{Ia}$$

Nunmehr führen wir eine Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$ (Grensche Funktion) ein, die folgende Eigenschaften haben möge:

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\gamma_1 \lg \varrho + \gamma_2;$$

dabei seien γ_1 und γ_2 innerhalb des ganzen in Frage kommenden Gebietes stetige, zweimal differenzierbare Funktionen, die so bestimmt sind, daß

$$\gamma_1(\xi, \eta; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}$$

und

$$\Delta(G(x, y; \xi, \eta)) = 0$$

ist im ganzen Gebiet außer an der Stelle $x = \xi$, $y = \eta$; außerdem $G(x, y; \xi, \eta)$ auf dem Rande verschwindet. ϱ sei gleich dem Ausdruck $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$.

Der Greensche Satz lautet:

$$\int_{\mathfrak{T}} \{v L(u) - u L(v)\}\, d\mathfrak{T} = \int_C \left\{u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right\} d\sigma,$$

wobei $L(u)$ bzw. $L(v)$ sich selbst adjungierte Differentialausdrücke sind; $\mathfrak{T}$ ist das gesamte Gebiet, C die Randkurve.

Bezeichnen wir das von uns zu betrachtende Gebiet mit Γ, den Rand dieses Gebietes mit R, führen wir ferner für L den Differentialausdruck Δ ein und setzen

$$v = G(x, y; \xi, \eta)$$
$$u = u(x, y),$$

so erhalten wir unter Berücksichtigung der vorkommenden Unstetigkeiten aus dem Greenschen Satz durch einfache Umrechnung folgende Gleichung:

$$-\int_\Gamma G(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(u)\, d\mathfrak{T}_{x,y} = \int_R \left\{u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n}\right\} d\sigma - u(\xi, \eta).$$

Berücksichtigen wir nun die Randbedingungen für G und u, führen für $\varphi(u)$ wieder die Potenzreihe ein, und machen die Substitution

$$\int_R h(\sigma)\frac{\partial G}{\partial n}d\sigma = v(\xi,\eta), \tag{1}$$

so ergibt das folgende Integralgleichung:

$$u(\xi,\eta) = \int_\Gamma G(x,y;\xi,\eta)\left\{u(x,y) + \frac{u^3(x,y)}{3!} + \frac{u^5(x,y)}{5!} + \cdots\right\} d\mathfrak{T}_{x,y} + v(\xi,\eta). \quad \text{II}$$

Somit haben wir die nichtlineare Differentialgleichung I unter Einschluß der Randbedingung Ia in eine ebensolche Integralgleichung verwandelt. Allerdings ist in der vorangehenden Rechnung an sich nur gezeigt, daß jede Lösung der Differentialgleichung I, die der Randbedingung Ia genügt, auch eine Lösung der Integralgleichung II ist. Die Umkehrung, daß jede Lösung der Integralgleichung II auch eine Lösung der Differentialgleichung I ist, läßt sich leicht durch zweimalige Differentiation zeigen. Daß diese Lösungen auch der Randbedingung genügen, geht daraus hervor, daß der Ausdruck

$$v(\xi,\eta) = \int_R h(\sigma)\frac{\partial G}{\partial n}d\sigma$$

beim Heranrücken an den Rand dem Werte $h(\sigma)$ zustrebt.*)

Zur Abkürzung wollen wir für die weiteren Rechnungen an Stelle des Variablenpaares ξ, η das Symbol s, an Stelle des Variablenpaares x, y das Symbol t einführen und dementsprechend für $d\mathfrak{T}_{\xi,\eta}$ und $d\mathfrak{T}_{x,y}$ ds bzw. dt setzen.

In der abgekürzten Schreibweise hat die Integralgleichung II folgendes Aussehen:

$$u(s) = \int_\Gamma G(s,t)\left\{u(t) + \frac{u^3(t)}{3!} + \frac{u^5(t)}{5!} + \cdots\right\} dt + v(s).$$

Um die Lösungen dieser Integralgleichung zu diskutieren, müssen wir nach Erhard Schmidt (l. c. § 4) zunächst die lineare Integralgleichung

$$u(s) = \int_\Gamma G(s,t)u(t)dt \quad \text{III}$$

untersuchen.

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden: Erstens die Integralgleichung III hat keine Nullösungen, dann ist die Integralgleichung II eindeutig lösbar, wenn nur das Maximum des absoluten Betrages von $v(s)$ genügend klein ist. Zweitens die Integralgleichung III *hat eine oder mehrere Nullösungen*, dann treten bei den Lösungen der Integralgleichung II *Verzweigungen* auf, die wir im folgenden untersuchen wollen.

*) Harnack: „Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials“ Leipzig 1887, § 40.

Bemerkung: Auf die Integralgleichung III würden wir gestoßen sein, wenn wir von der Differentialgleichung $\Delta u + u = 0$ mit der Randbedingung, daß u längs des Randes verschwindet, ausgegangen wären, und dann den Übergang zur Integralgleichung in analoger Weise wie oben durchgeführt hätten.

§ 2.

Aufstellung der Verzweigungsgleichung im Falle des Vorhandenseins einer Nullösung.*)

Der Kern $G(s,t)$ habe für das von uns betrachtete Gebiet Γ als einzige Nullösung in s die Funktion $\psi(s)$. Unser Kern ist aber als Greensche Funktion eines sich selbst adjungierten Differentialausdruckes symmetrisch in Bezug auf s und t**); folglich hat er auch als einzige Nullösung in t die Funktion $\psi(t)$.

Wir bilden uns nun einen Kern

$$E(s,t) = G(s,t) - \psi(s)\psi(t) \tag{1}$$

und behaupten, daß dieser Kern keine Nullösungen mehr hat.

Es sei $\varphi(s)$ eine Nullösung des Kernes $E(s,t)$, dann ist

$$\varphi(t) = \int_\Gamma E(s,t)\varphi(s)ds = \int_\Gamma G(s,t)\varphi(s)ds - \psi(t)\int_\Gamma \psi(s)\varphi(s)ds .$$

Durch Multiplikation mit $\psi(t)$ und Integration erhalten wir:

$$\int_\Gamma \varphi(t)\psi(t)dt = \int_\Gamma \varphi(s)\int_\Gamma G(s,t)\psi(t)dtds - \int_\Gamma [\psi(t)]^2 dt \int_\Gamma \psi(s)\varphi(s)ds .$$

$$\int_\Gamma \varphi(t)\psi(t)dt = \int_\Gamma \varphi(s)\psi(s)ds - \int \varphi(s)\psi(s)ds = 0 .$$

Ist aber diese Gleichung erfüllt, so geht aus der ersten soeben aufgestellten Gleichung hervor, daß $\varphi(t)$ auch eine Nullösung des Kernes $G(s,t)$ ist, was mit unserer Annahme im Widerspruch stände, weil wegen der Orthogonalität von $\varphi(t)$ zu $\psi(t)$ $\varphi(t)$ nicht identisch $\psi(t)$ sein kann.

Den lösenden Kern***) zu $E(s,t)$ bezeichnen wir mit $\mathsf{E}(s,t)$, so daß die Beziehung besteht:

$$E(s,t) = \mathsf{E}(s,t) - \int_\Gamma E(t,r)\mathsf{E}(r,s)dr . \tag{2}$$

*) Vgl. Erhard Schmidt: l. c. § 8. Durch Einführung des symmetrischen Kernes, sowie der Eigenfunktionen bei der Bildung des Kernes $E(s,t)$ vereinfachen sich die dort bei E. Schmidt durchgeführten Rechnungen für uns wesentlich.

**) Hilbert l. c. S. 238.

***) E. Schmidt: „Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen" 2. Abh. Math. Annalen Bd. 64. — Auch der lösende Kern ist bei uns symmetrisch, wie aus den Fredholmschen Formeln hervorgeht.

Wenn ferner die Gleichung besteht:

$$f(s) = \varphi(s) - \int_I E(s,t)\varphi(t)\,dt, \tag{2a}$$

so ist die Lösung gegeben durch die Formel

$$\varphi(s) = f(s) + \int_I \mathsf{E}(s,t) f(t)\,dt. \tag{2b}$$

Außerdem bestehen folgende Beziehungen:

$$\begin{cases} \int_I E(s,t)\psi(t)\,dt = 0 \\ \int_I \mathsf{E}(s,t)\psi(t)\,dt = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen geht ohne weiteres aus Gleichung (1) hervor, wenn man berücksichtigt, daß $\psi(s)$ eine normierte Funktion ist; die zweite ist eine Folge der ersten, wenn man die oben angegebenen Beziehungen zwischen $E(s,t)$ und $\mathsf{E}(s,t)$ berücksichtigt.

Zur Abkürzung führen wir ein:

$$v(s) + \int_I \mathsf{E}(s,t) v(t)\,dt = q(s) \tag{4}$$

und bemerken gleich an dieser Stelle, daß

$$\int_I v(s)\psi(s)\,ds = \int_I q(s)\psi(s)\,ds. \tag{5}$$

Ferner setzen wir den später auftretenden Ausdruck:

$$G(s,t) + \int_I \mathsf{E}(s,r) G(r,t)\,dr = K(s,t). \tag{6}$$

Eine einfache Umformung zeigt, daß dieser Ausdruck symmetrisch in Bezug auf s und t ist. Es ist nämlich unter Berücksichtigung von (1), (2) und (3)

$$K(s,t) = E(s,t) + \psi(s)\cdot\psi(t) + \int_I \mathsf{E}(s,r)\,E(r,t)\,dr + \int_I \mathsf{E}(s,r)\psi(r)\psi(t)\,dr$$

$$= \mathsf{E}(s,t) + \psi(s)\psi(t).$$

Das ist aber eine symmetrische Funktion.

Aus dieser Darstellungsform geht auch sofort hervor, daß

$$\int_I K(s,t)\psi(t)\,dt = \psi(s) \text{ ist.} \tag{6a}$$

Die zu untersuchende Integralgleichung lautete:

$$u(s) = \int_I G(s,t)\left\{u(t) + \frac{u^3(t)}{3!} + \frac{u^5(t)}{5!} + \cdots\right\} dt + v(s).$$

Führen wir aus Gleichung (1) den Kern E ein, so erhalten wir:

$$u(s) - \int_I E(s,t)u(t)\,dt = \psi(s)\int_I \psi(t)u(t)\,dt + v(s) + \int_I G(s,t)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u^{2\nu+1}(t)}{(2\nu+1)!}\,dt.$$

Durch Einführung des lösenden Kernes gemäß den Beziehungen (2a) und (2b) ergibt sich:

$$u(s) = \psi(s)\int_I \psi(t)u(t)\,dt + v(s) + \int_I \mathsf{E}(s,t)\left\{\psi(t)\int_I u(r)\psi(r)\,dr + v(t)\right\}dt$$

$$+\int_I G(s,t)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u^{2\nu+1}(t)}{(2\nu+1)!}\,dt + \int_I \mathsf{E}(s,t)\int_I G(t,r)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u^{2\nu+1}(r)}{(2\nu+1)!}\,dr\,dt,$$

$$u(s) = \left\{\psi(s) + \int_I \mathsf{E}(s,t)\,\psi(t)\,dt\right\}\int_I \psi(t)u(t)\,dt$$

$$+\left\{v(s) + \int_I \mathsf{E}(s,t)v(t)\,dt\right\}$$

$$+\int_I dt\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u^{2\nu+1}(t)}{(2\nu+1)!}\left\{G(s,t) + \int_I \mathsf{E}(s,r)\,G(r,t)\,dr\right\}.$$

Berücksichtigen wir in dieser Formel Gleichung (3) und führen wir die Substitutionen (4) und (6) ein, so erhalten wir:

$$u(s) = \psi(s)\int_I \psi(t)u(t)\,dt + q(s) + \int_I K(s,t)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u^{2\nu+1}(t)}{(2\nu+1)!}\,dt.$$

Nun führen wir einen Parameter λ derart ein, daß

$$\lambda = \int_I \psi(t)u(t)\,dt \quad \text{ist,} \tag{7}$$

dann ist

$$u(s) = \lambda\psi(s) + q(s) + \int_I K(s,t)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u^{2\nu+1}(t)}{(2\nu+1)!}\,dt. \tag{8}$$

Aus diesen beiden Gleichungen wollen wir im folgenden die Funktion u formal entwickeln. Eine solche formale Entwickelung hat stets einen Sinn und stellt auch die Funktion u wirklich dar, wenn wir nur den Funktionen u und v die Beschränkung auferlegen, daß die Maxima ihrer absoluten Beträge in dem zu untersuchenden Gebiet I stets unter je einer ganz bestimmten endlichen Grenze bleiben.*)

Wir bezeichnen den Ausdruck $\lambda\psi(s) + q(s)$ mit $k(s)$ und führen zur genauen Darstellung der aus (8) sich ergebenden Entwickelung noch folgende Bezeichnungen ein:

*) E. Schmidt l. c. § 9 S. 394.

$$u_1(s) = k(s),$$
$$u_2(s) = 0,$$
$$u_3(s) = \int_I K(s,t)\frac{[k(t)]^3}{3!}dt,$$
$$u_4(s) = 0,$$
$$u_5(s) = \int_I K(s,t)\frac{[k(t)]^5}{5!} + \int_I K(s,t)\frac{[k(t)]^2}{2!}\cdot\int K(t,r)\frac{[k(r)]^3}{3!}\,dtdr,$$
$$u_6(s) = 0,$$
$$\cdots\cdots$$

Dann ist

$$u(s) = \lim_{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu(s).$$

Bezeichnen wir nun mit $V_\nu(k_s)$ nach E. Schmidt Integralpotenzformen ν-ten Grades in $k(s)$, so erhält unsere Lösung folgende Form:

$$u(s) = k(s) + \int_I K(s,t)\frac{[k(t)]^3}{3!}dt + V_5(k_s) + V_7(k_s) + \cdots \tag{9}$$

Zur Aufstellung der Verzweigungsgleichung führen wir diesen Ausdruck in (7) ein; setzen wir dabei für $k(s)$ wieder $\lambda\psi(s) + q(s)$ und beachten wir die Gleichung (6a), so erhalten wir

$$\lambda = \lambda\int_I [\psi(s)]^2 ds + \int_I q(s)\psi(s)\,ds + \int_I \psi(t)\frac{[\lambda\psi(t)+q(t)]^3}{3!}dt$$
$$+\int_I \{V_5^0(\lambda\psi_t + q) + V_7^0(\lambda\psi_t + q) + \cdots\}dt;$$

dabei sind die V^0 andere Integralpotenzformen als die V.

Beachten wir die Tatsache, daß $\psi(s)$ eine normierte Funktion ist, und wenden wir Gleichung (5) an, so erhalten wir

$$\begin{cases} 0 = \int_I v(s)\psi(s)ds + \frac{1}{3!}\int_I \psi(t)[\lambda\psi(t) + q(t)]^3 dt + \sum_{\nu=2}^{\infty}\int_I V^0_{2\nu+1}(\lambda\psi_t + q)dt \\ \text{oder} \\ 0 = \int_I v(s)\psi(s)ds \\ \quad + \frac{1}{3!}\left\{\lambda^3\int_I [\psi(t)]^4 dt + 3\lambda^2\int_I [\psi(t)]^3 q(t)\,dt + 3\lambda\int_I [\psi(t)]^2[q(t)]^2 dt + \int_I \psi(t)[q(t)]^3 dt\right\} \\ \quad + \sum_{\nu=2}^{\infty}\int_I V^0_{2\nu+1}(\lambda\psi_t + q)dt. \end{cases}$$

Haben wir aus Gleichung (10) einen Wert für λ erhalten, so läßt sich durch Einsetzen dieses Wertes in (9) die Funktion $u(s)$ eindeutig bestimmen. Da somit mehrere Entwickelungen von $u(s)$ nur dadurch entstehen können, daß wir aus Gleichung (10) mehrere Werte von λ erhalten, so nennt E. Schmidt diese zuletzt aufgestellte Gleichung die *Verzweigungsgleichung.*

Im folgenden werden wir uns auch die Frage *nach der Realität der Lösungen* für $u(s)$ vorlegen unter der Voraussetzung, daß $v(s)$ eine reelle Funktion ist. Die in Formel (9) auftretenden Funktionen sind sämtlich reell, denn $G(s,t)$ und $\psi(s)$ sind reell, folglich auch $E(s,t)$ und $\mathsf{E}(s,t)$, und da $v(s)$ reell sein soll, so ist auch $q(s)$ reell. Alle diese Funktionen kommen aber ebenso wie λ nur in ganzen Potenzen vor. Imaginäres kann also nur dadurch in die Entwicklung eintreten, daß λ imaginäre oder komplexe Werte annimmt. Die Frage reduziert sich also auf die andere: Wann werden die aus der Verzweigungsgleichung sich ergebenden Lösungen für λ reell und wie groß ist die Anzahl dieser reellen Lösungen? Auch auf diese Frage wird uns die im nächsten Paragraphen folgende Diskussion der Verzweigungsgleichung wenigstens bis zu einem gewissen Grade Antwort geben können.

§ 3.

Diskussion der Verzweigungsgleichung.

Das Glied niedrigster Ordnung, das von der Funktion q bzw. v frei ist in der Verzweigungsgleichung (10), ist das Glied 3-ter Ordnung in λ

$$\frac{\lambda^3}{3!}\int_I \psi^4(t)\,dt.$$

Hieraus ergibt sich sofort, daß dieses Glied nicht verschwinden kann, da ja die Funktion $\psi(s)$ im Gebiet I nicht identisch verschwindet. Somit erhalten wir entsprechend einem dem Puiseuxschen Theorem analogen Satz von E. Schmidt*) *drei Lösungen für* λ und somit auch drei Lösungen für $u(s)$ in der Umgebung der Stelle $u(s) = 0$, $v(s) = 0$.

Von diesen drei Lösungen ist sicher eine reell, die anderen beiden aber entweder auch reell oder konjugiert komplex. Im folgenden soll nun untersucht werden, wie die Realitätsverhältnisse in unserem speziellen Falle liegen.

Wir setzen die rechte Seite der ersten Gleichung (10) als Funktion von λ aufgefaßt gleich z. z kann nur dann für mehrere reelle Werte von λ den Wert 0 annehmen, wenn die Funktion mindestens ein Extremum hat.

*) l. c. § 9 S. 394.

Differenzieren wir die Gleichung, so erhalten wir:

$$dz = \frac{d\lambda}{2!}\left\{\int_I \psi^2(t)[\lambda\psi(t) + q(t)]^2\,dt + \sum_{\nu=2}^{\infty}\int V^1_{2\nu}(\lambda\psi_t + q)\,dt\right\};$$

dabei bedeuten die V^1_ν wieder Integralpotenzformen ν-ten Grades.

Ein Extremum tritt nur ein, wenn $dz = 0$ wird, bei gegebenem q also

$$\int_I \psi^2(t)[\lambda\psi(t) + q(t)]^2\,dt + \sum_{\nu=2}^{\infty}\int V^1_{2\nu}(\lambda\psi_t + q)\,dt = 0 \tag{1}$$

wird.

Für die weiteren Untersuchungen machen wir nun über die Art der Variation der Funktion $v(s)$ eine Annahme, von der wir uns, wie ich zeigen werde, nicht ohne weiteres befreien können; nämlich, daß $v(s)$ in der Form $\mu \cdot v_1(s)$ gegeben ist, wobei das Maximum des absoluten Betrages von $v_1(s)$ im Gebiete I stets endlich bleiben muß, μ einen Parameter bedeutet. Durch genügend kleine Wahl des Parameters können wir dann stets erreichen, daß die einzige Bedingung, der $v(s)$ unterworfen ist, nämlich daß das Maximum des absoluten Betrages von $v(s)$ unter einer ganz bestimmten endlichen Grenze bleibt, erfüllt ist. Wir haben dadurch den Begriff „hinreichend klein“ für $v(s)$ modifiziert.

Nach § 2 Gleichung (4) ist

$$\begin{aligned} q(s) &= v(s) + \int_I \mathsf{E}(s,t)v(t)\,dt \\ &= \mu\left(v_1(s) + \int_I \mathsf{E}(s,t)v_1(t)\,dt\right), \end{aligned}$$

setzen wir dann

$$v_1(s) + \int_I \mathsf{E}(s,t)v_1(t)\,dt = q_1(s),$$

so ist auch

$$q(s) = \mu \cdot q_1(s)$$

und unsere Gleichung erhält die Form

$$\int_I \psi^2(t)[\lambda\psi(t) + \mu q_1(t)]^2\,dt + \sum_{\nu=2}^{\infty}\int V^1_{2\nu}(\lambda\psi_t + \mu q_1)\,dt = 0. \tag{2}$$

Der Ausdruck links wird sicher null für $\lambda = 0$, $\mu = 0$; ob der Ausdruck, der als eine Funktion von λ und μ aufgefaßt werden muß, deren Koeffizienten bestimmte Integrale sind, in der Nähe der Stelle $\lambda = 0$, $\mu = 0$ keine weiteren Nullstellen hat, das hängt ab von den Gliedern niedrigster Ordnung in λ und μ, in unserem Fall von dem Ausdruck 2. Grades:

$$\int_I \psi^2(t)[\lambda\psi(t) + \mu q_1(t)]^2\,dt.$$

Dieser Ausdruck ist aber immer positiv, wie wir auch auch λ und μ wählen, ist also eine „definite Form“. Der Ausdruck $\lambda\psi(t) + \mu \cdot q_1(t) = \lambda\psi(t) + q(t)$ kann nämlich nicht verschwinden, weil $q(t)$ und damit auch $v(t)$ dann am Rande des Gebietes Γ, wo $\psi(t)$ verschwindet, ebenfalls null werden müßte, während tatsächlich $v(t)$ am Rande des Gebietes unserer Randfunktion $h(\sigma)$ zustrebt. Folglich hat die quadratische Form an der Stelle $\lambda = 0$, $\mu = 0$ ein Extremum und somit wird in der Umgebung dieser Stelle der Wert 0 nicht wieder erreicht.*) Der auf der linken Seite von (2) stehende Ausdruck kann also für $\mu \neq 0$ nicht verschwinden, und die Funktion z besitzt kein Extremum, sobald wir nur λ und μ hinreichend klein wählen.

Der Schluß, daß über das Extremum einer Funktion von zwei Variablen an der Stelle, wo die Variablen 0 sind, die „definite“ oder „indefinite Form“ des Ausdrucks niedrigster Ordnung entscheidend ist, läßt sich auf eine beliebig große *endliche* Anzahl von Variablen ausdehnen.**) Auf unendliche viele Variable darf man ihn nicht übertragen. Hilbert hat Beispiele angeführt, in denen der Schluß dann nicht mehr zutrifft.***) Infolgedessen darf dieser Schluß auch nicht auf Potenzreihen, deren Glieder Integralpotenzformen sind (Integralpotenzreihen!) und somit auch nicht auf die linke Seite der Gleichung (1) dieses Paragraphen Anwendung finden. Ob in unserem speziellen Fall der Schluß zulässig wäre, muß weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben. Aus diesem Grunde war die Einführung des Parameters μ notwendig.

Das Resultat dieses Paragraphen ist folgendes: Im Falle der Einführung des Parameters μ erhalten wir aus der Verzweigungsgleichung stets eine und nur eine reelle Lösung für λ und somit *stets eine und nur eine reelle Lösung für* $u(s)$. Die beiden anderen Lösungen für λ bzw. $u(s)$ werden konjugiert komplex.

§ 4.

Weitere Diskussion der Verzweigungsgleichung.

Für den eben betrachteten speziellen Fall, daß $v(s)$ in der Form $\mu \cdot v_1(s)$ gegeben ist, wollen wir die aus der Verzweigungsgleichung sich ergebenden Entwicklungen für λ nach μ näher untersuchen.

Die Verzweigungsgleichung hat in diesem Falle folgendes Aussehen:

$$(1) \qquad 0 = b_0\mu + \lambda^3 a_0 + 3\lambda^2\mu a_1 + 3\lambda\mu^2 a_2 + \mu^3 a_3 + f_5(\lambda, \mu) + \cdots$$

*) Vgl. hierzu: Stolz „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung“. Erster Teil, V. Abschnitt B — Leipzig 1893.

**) Stolz l. c.

***) „Wesen und Ziele einer Analysis der unendl. vielen Variablen“, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Tomo XXVII, 1909.

Dabei bedeutet f_5 einen Ausdruck 5. Grades in λ und μ, ferner ist

$$a_0 = \frac{1}{3!}\int_\Gamma \psi^4(t)\,dt > 0$$

$$a_1 = \frac{1}{3!}\int_\Gamma \psi^3(t) q_1(t)\,dt$$

$$a_2 = \frac{1}{3!}\int_\Gamma \psi^2(t) q_1^2(t)\,dt > 0$$

$$a_3 = \frac{1}{3!}\int_\Gamma \psi(t) q_1^3(t)\,dt.$$

$$b_0 = \int_\Gamma \psi(t) v_1(t)\,dt.$$

Verschwindet der Koeffizient b_0 nicht, so erhalten wir Entwickelungen von λ nach $\sqrt[3]{\mu}$. Von den drei Wurzeln dieses Ausdrucks wird eine reell, die beiden anderen konjugiert komplex. Somit ergeben sich auch *eine reelle* und *zwei konjugiert komplexe Entwickelungen* für λ *nach gebrochenen Potenzen von* μ. Für diesen Fall erscheint also das Resultat des vorigen Paragraphen trivial.

Entwickelungen nach ganzen Potenzen von μ können wir nur erhalten, wenn der Koeffizient b_0 verschwindet, d. h. wenn

$$\int \psi(s) v_1(s)\,ds = 0 \tag{2}$$

wird. Ob wir unsere ursprüngliche Randfunktion so bestimmen können, daß diese Gleichung erfüllt wird, bzw. welche Bedingungen wir der Randfunktion — wir hatten sie $h(\sigma)$ genannt — auferlegen müssen, soll später untersucht werden.

Wir nehmen nun an, Gleichung (2) sei erfüllt, und machen in (1) folgende Transformation:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\mu}, \tag{3}$$

dann bekommen wir zwischen λ' und μ die Gleichung:

$$0 = a_0\lambda'^3 + 3a_1\lambda'^2 + 3a_2\lambda' + a_3 + \mu^2 f_5(1, \lambda') + \cdots \tag{4}$$

Um hieraus die Entwickelungen von λ' nach μ zu ermitteln, müssen wir zunächst die Gleichung dritten Grades

$$a_0\lambda'^3 + 3a_1\lambda'^2 + 3a_2\lambda' + a_3 = 0$$

diskutieren.

Über den Wert der Diskriminante dieser Gleichung, die wir mit D bezeichnen wollen, können wir zunächst nichts aussagen, müssen infolgedessen alle möglichen 4 Fälle unterscheiden.

1. $D > 0$, die Wurzeln sind voneinander verschieden; eine ist reell, die beiden anderen konjugiert komplex.
2. $D < 0$, die Wurzeln sind voneinander verschieden und sämtlich reell.
3. $D = 0$, zwei Wurzeln fallen zusammen, die dritte ist verschieden; alle Wurzeln sind reell.
4. $D = 0$, die drei Wurzeln fallen zusammen und sind reell.

Wir wollen nun die Entwickelungen von λ' in den 4 Fällen getrennt behandeln.

1. Fall: Die reelle Wurzel sei α, die beiden konjugiert komplexen β und γ; dann läßt sich Gleichung (4) schreiben:

$$0 = a_0(\lambda' - \alpha)(\lambda' - \beta)(\lambda' - \gamma) + \mu^2 f_3(1, \lambda') + \cdots$$

Wir machen die Substitution:

$$\lambda' - \alpha = \lambda_1' \tag{5}$$

und erhalten:

$$0 = a_0\lambda_1'(\lambda_1' - \beta')(\lambda_1' - \gamma') + \mu^2 f_3(1, \lambda_1') + \cdots,$$

dabei ist

$$\beta' = \beta - \alpha; \quad \gamma' = \gamma - \alpha. \tag{6}$$

$$0 = a_0\beta'\gamma'\lambda_1' - a_0(\beta' + \gamma')\lambda_1'^2 + a_0\lambda_1'^3 + \mu^2 f_3(1, \lambda_1') + \cdots \tag{7}$$

Da der Koeffizient von λ_1' nicht verschwindet, läßt sich λ_1' in folgender Weise nach Potenzen von μ entwickeln:

$$\lambda_1' = b\mu^2 + b_1\mu^3 + \cdots$$

Die Koeffizienten b hängen von dem Koeffizienten a_0 sowie von den in $f_3 \ldots$ vorkommenden Koeffizienten ab: diese sind aber gemäß unseren Voraussetzungen sämtlich reell und gehen in die Ausdrücke b nur in ganzen Potenzen ein; außerdem hängen diese Koeffizienten nur noch von den Wurzeln β und γ ab. Diese Wurzeln sind aber in unserem Falle konjugiert komplex; dann sind aber auch die Ausdrücke β' und γ' konjugiert komplex, wie aus Gleichung (6) hervorgeht. Aus Gleichung (7) ist ersichtlich, daß diese Größen nur in den Kombinationen $\beta' + \gamma'$ und $\beta' \cdot \gamma'$ in die Koeffizienten b eingehen. Die Größen b werden also reell.

Aus Gleichung (5) folgt:

$$\lambda' = \alpha + b\mu^2 + b_1\mu^3 + \cdots$$

und aus Gleichung (3) erhalten wir:

$$\lambda = \alpha\mu + b\mu^3 + b_1\mu^4 + \cdots$$

Entsprechende Entwickelungen würden wir erhalten haben, wenn wir $\lambda' - \beta$ bzw. $\lambda' - \gamma$ gleich λ_2' bzw. λ_3' gesetzt hätten. In diesem Falle werden aber, wie man leicht einsehen wird, die Koeffizienten b nicht reell. Somit erhalten wir folgende drei Entwickelungen:

$$\lambda_1 = \alpha\mu + b_{01}\mu^3 + b_{11}\mu^4 + \cdots$$
$$\lambda_2 = \beta\mu + b_{02}\mu^3 + b_{12}\mu^4 + \cdots$$
$$\lambda_3 = \gamma\mu + b_{03}\mu^3 + b_{13}\mu^4 + \cdots$$

Die erste dieser Entwickelungen ist reell, die beiden anderen, die mit den Gliedern $\beta\mu$ und $\gamma\mu$ beginnen, *werden notwendig komplex,* wir müssen also diesen Fall auf Grund des Resultats des vorigen Paragraphen *zulassen.*

2. Fall. Die drei reellen Wurzeln seien α, β und γ. Wir erhalten formell die gleichen Entwickelungen wie im ersten Fall. Doch werden hier *sämtliche Entwickelungen reell,* wovon man sich leicht überzeugen kann. Dieser Fall ist *also auszuschließen.*

3. Fall. Die zusammenfallenden Wurzeln seien α, die dritte Wurzel β. Dann können wir für Gleichung (4) schreiben:

$$0 = a_0(\lambda' - \alpha)^2(\lambda' - \beta) + \mu^2 f_5(1, \lambda') + \cdots$$

Diese Gleichung stimmt aber in den von μ freien Gliedern mit der Form niedrigster Ordnung der Verzweigungsgleichung überein, wenn man darin $\mu = 1$ setzt. Im Paragraphen 3 hatten wir gezeigt, daß der Differentialquotient dieser Form stets positiv ist und keine reelle Nullstelle hat. In unserem Falle wäre nun $\lambda' = \alpha$ eine solche Nullstelle des Differentialquotienten; daher müssen wir *diesen Fall,* der uns auf einen Widerspruch führen würde, *ausschließen.*

4. Fall. Die zusammenfallenden Wurzeln seien α, dann ergibt Gleichung (4):

$$0 = a_0(\lambda' - \alpha)^3 + \mu^2 f_5(1, \lambda') + \cdots$$

Auch diesen Fall müssen wir ausschließen, da wieder $\lambda' = \alpha$ eine Nullstelle des Differentialquotienten der Glieder niedrigster Ordnung der Verzweigungsgleichung wäre.

Es mag festgestellt werden, daß wir im Falle der Zulässigkeit der beiden letzten Fälle im allgemeinen Entwickelungen nach gebrochenen Potenzen von μ erhalten hätten.

So aber haben die Untersuchungen der letzten beiden Paragraphen gezeigt, daß wir, wenn

$$b_0 = \int_{J'} \psi(t) v_1(t)\, dt \neq 0$$

ist, stets eine reelle und zwei konjugiert komplexe Entwickelungen *nach* $\sqrt[3]{\mu}$ *erhalten,* wenn aber

$$b_0 = \int_{J'} \psi(t) v_1(t)\, dt = 0$$

wird, stets eine reelle und zwei konjugiert komplexe Entwickelungen *nach ganzen Potenzen von* μ bekommen; und zwar so, daß beim letzten Falle schon die Koeffizienten der in μ linearen Glieder komplex werden.

§ 5.

Einschränkende Bedingung für die Randfunktion $h(\sigma)$.

In diesem Paragraphen bedienen wir uns der ausführlichen Schreibweise mit Variablenpaaren.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß wir aus der Verzweigungsgleichung Entwickelungen nach ganzen Potenzen von μ für λ erhielten, war ausgedrückt durch die Forderung

$$\int_I v_1(\xi,\eta)\psi(\xi,\eta)\,d\mathfrak{T}_{\xi\eta} = 0.$$

Im folgenden wollen wir diese Bedingung auf die Randfunktion $h(\sigma)$ übertragen.

Selbstverständlich muß der Parameter μ nach unseren Annahmen schon in die Funktion $h(\sigma)$ eingehen, so daß $h(\sigma) = \mu \cdot h_1(\sigma)$ ist. Nach Gleichung (1) des § 1 ist dann:

$$v_1(\xi,\eta) = \int_R h_1(\sigma)\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma.$$

Unsere Bedingungsgleichung lautet nun

$$\int_I \psi(\xi,\eta)\int_R h_1(\sigma)\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma\,d\mathfrak{T}_{\xi,\eta} = 0.$$

Durch Vertauschung der beiden Integralzeichen erhalten wir:

$$\int_R h_1(\sigma)\cdot\int_I \psi(\xi,\eta)\frac{\partial G}{\partial n}\,d\mathfrak{T}_{\xi,\eta}\,d\sigma = 0.$$

Vertauschen wir nunmehr die Operationen der Differentiation und Integration, so ergibt dies:

$$\int_R h_1(\sigma)\cdot\frac{\partial}{\partial n}\int_I G(x,y;\xi,\eta)\psi(\xi,\eta)\,d\mathfrak{T}_{\xi,\eta}\,d\sigma = 0.$$

Beachten wir, daß $\psi(\xi,\eta)$ eine Nullösung des Kernes $G(x,y;\xi,\eta)$ ist, so erhalten wir:

$$\int_R h(\sigma)\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma = 0.$$

Funktionen $h(\sigma)$, welche diese Bedingungen erfüllen, lassen sich leicht konstruieren.

Daß die hier vorgenommenen Operationsvertauschungen erlaubt sind, läßt sich leicht zeigen, wenn man in der gleichen Weise wie beim Greenschen Satz vorgeht und für G den in § 1 angegebenen Wert einsetzt.

§ 6.

Aufstellung der Verzweigungsgleichungen im Falle des Vorhandenseins mehrerer Nullösungen.*)

Der symmetrische Kern $G(s,t)$ habe für das zu betrachtende Gebiet die n normierten und orthogonalen Nullösungen

$$\psi_1(s),\ \psi_2(s),\ \ldots\ \psi_n(s),$$

wobei die Zeichen s und t wieder Symbole für die Variablenpaare ξ,η und x,y sind.

Die Rechnung ist nun in vollständig analoger Weise wie im Paragraphen 2 durchzuführen. Wir werden uns darauf beschränken, die Formeln anzugeben, die wir auf diese Weise erhalten.

Als Kern, der keine Nullösungen mehr hat, führen wir ein:

$$E(s,t) = G(s,t) - \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(s)\psi_\nu(t), \tag{1}$$

der lösende Kern zu $E(s,t)$ sei $\mathsf{E}(s,t)$, dann gelten die Gleichungen

$$\begin{cases} \int_I E(s,t)\psi_\nu(t)\,dt = 0 & (\nu = 1, 2, \ldots n) \\ \int_I \mathsf{E}(s,t)\psi_\nu(t)\,dt = 0. & (\nu = 1, 2, \ldots n) \end{cases} \tag{2}$$

Wir führen wieder ein

$$v(s) + \int_I \mathsf{E}(s,t)v(t)\,dt = q(s), \tag{4}$$

dann gelten auch die Beziehungen

$$\int_I v(s)\psi_\nu(s)\,ds = \int_I q(s)\psi_\nu(s)\,ds. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n) \tag{5}$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$G(s,t) + \int_I \mathsf{E}(s,r)G(r,t)\,dr = K(s,t). \tag{6}$$

$K(s,t)$ ist dann symmetrisch in Bezug auf s und t. Außerdem ist

$$\int_I \psi_\nu(s)K(s,t)\,ds = \psi_\nu(t). \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n) \tag{6a}$$

Rechnen wir mit Hilfe dieser Formeln genau wie im Paragraphen 2 die von uns zu untersuchende Integralgleichung II um und führen außerdem n Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ derart ein, daß

*) Vgl. E. Schmidt l. c. § 10.

$$\lambda_\nu = \int_I \psi_\nu(t) u(t)\, dt \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n) \tag{7}$$

ist, dann ist

$$u(s) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \psi_\nu(s) + q(s) + \int_I K(s,t) \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{u^{2\varkappa+1}(t)}{(2\varkappa+1)!}\, dt\,. \tag{8}$$

Die aus den Gleichungen (7) und (8) sich ergebende formale Entwickelung für $u(s)$ hat einen Sinn und stellt die gesuchte Funktion wirklich dar, wenn nur die Maxima der absoluten Beträge der Funktionen $u(s)$ und $q(s)$ bzw. $u(s)$ und $v(s)$, sowie die Parameter $\lambda_\nu (\nu = 1, 2, \ldots n)$ unter gewissen ganz bestimmten endlichen Grenzen bleiben.*)

Aus Gleichung (8) erhalten wir nach Einführung der Substitution

$$k_n(s) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \psi_\nu(s) + q(s), \tag{9}$$

folgende explizite Darstellung für $u(s)$:

$$u(s) = k_n(s) + \int_I K(s,t) \frac{k_n^3(t)}{3!}\, dt + \sum_{\varkappa=0}^{\infty} V_{2\varkappa+5}\left(\begin{smallmatrix} k_n \\ s \end{smallmatrix}\right), \tag{10}$$

wobei $V_\varkappa\left(\begin{smallmatrix} k \\ s \end{smallmatrix}\right)$ wieder eine Integralpotenzform von der Ordnung $\varkappa$ bedeutet.

Zur Aufstellung der *Verzweigungsgleichungen* führen wir den Ausdruck (10) für $u(s)$ in die Gleichungen (7) ein und erhalten unter Berücksichtigung der Formeln (5) und (6a) folgende n Gleichungen:

$$0 = \int_I \psi_\nu(s) \cdot v(s)\, ds + \int_I \psi_\nu(t) \frac{k_n^3(t)}{3!}\, dt + \int_I \sum_{\varkappa=0}^{\infty} V_{2\varkappa+5}\left(\begin{smallmatrix} k_n \\ t \end{smallmatrix}\right) dt\,. \tag{11}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Der weitere Gang der Auflösung ist folgender:

Aus den Verzweigungsgleichungen (11) werden zunächst die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ berechnet, die erhaltenen Werte dann in Gleichung (10) eingesetzt.

Über die Anzahl der Lösungen für $u(s)$, sowie über die Realität entscheiden, wie die Bemerkungen am Schluß des § 2 zeigen, allein die Verzweigungsgleichungen.

§ 7.

Diskussion der Verzweigungsgleichungen.

Aus dem gleichen Grunde wie in § 3 wollen wir annehmen, die Funktionen $v(s)$ und $q(s)$ seien in der Form $\mu \cdot v_1(s)$ und $\mu \cdot q_1(s)$ gegeben.

Es soll nun in dem Falle des Vorhandenseins mehrerer (n) Null-

*) E. Schmidt l. c. S. 396.

lösungen gezeigt werden, daß nur eine einzige reelle Lösung für $u(s)$ möglich ist; d. h. daß die Gleichungen (11) nur ein einziges reelles Lösungssystem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ haben.

Gäbe es mehrere reelle Wertsysteme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, welche die rechten Seiten der Gleichungen (11) des vorigen Paragraphen zu null machen, so müßten die rechten Seiten als Funktion von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ aufgefaßt, mindestens ein Extremum haben. Wir werden aber zeigen, das das nicht möglich ist.

Setzen wir die rechten Seiten der Gleichung (11) des vorigen Paragraphen gleich z und differenzieren, so erhalten wir unter Beachtung der Tatsache, daß

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_\nu} \frac{k_n^3(s)}{3!} = \frac{\psi_\nu(s) k_n^2(s)}{2!}$$

ist, folgende Gleichungen:

$$dz = d\lambda_1 \left\{ \int_I \frac{\psi_1^2(t)}{2!} k_n^2(t)\,dt + \int_I \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{2\nu+4}^{11} \left(\frac{k_n}{t}\right) dt \right\}$$

$$+ d\lambda_2 \left\{ \int_I \frac{\psi_1(t)\,\psi_2(t)}{2!} k_n^2(t)\,dt + \int_I \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{2\nu+4}^{12} \left(\frac{k_n}{t}\right) dt \right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ d\lambda_n \left\{ \int_I \frac{\psi_1(t)\,\psi_n(t)}{2!} k_n^2(t)\,dt + \int_I \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{2\nu+4}^{1n} \left(\frac{k_n}{t}\right) dt \right\}$$

$$dz = d\lambda_1 \left\{ \int_I \frac{\psi_2(t)\,\psi_1(t)}{2!} k_n^2(t)\,dt + \int_I \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{2\nu+4}^{21} \left(\frac{k_n}{t}\right) dt \right\}$$

$$+ d\lambda_2 \left\{ \int_I \frac{\psi_2^2(t)}{2!} k_n^2(t)\,dt + \int_I \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{2\nu+4}^{22} \left(\frac{k_n}{t}\right) dt \right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ d\lambda_n \left\{ \int_I \frac{\psi_2(t)\,\psi_n(t)}{2!} \cdot k_n^2(t) + \int_I \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{2\nu+4}^{2n} \left(\frac{k_n}{t}\right) dt \right\}$$

$$\vdots$$

$$dz = d\lambda_1 \left\{ \int_I \frac{\psi_n(t)\,\psi_1(t)}{2!} \cdot k_n^2(t) + \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{2\nu+4}^{n1} \left(\frac{k_n}{t}\right) dt \right\}$$

$$+ d\lambda_2 \left\{ \int_I \frac{\psi_n(t)\,\psi_2(t)}{2!} k_n^2(t) + \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{2\nu+4}^{n2} \left(\frac{k_n}{t}\right) dt \right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ d\lambda_n \left\{ \int_I \frac{\psi_n^2(t)}{2!} k_n^2(t) + \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{2\nu+4}^{nn} \left(\frac{k_n}{t}\right) dt \right\}.$$

Der Übersichtlichkeit halber wollen wir diesen Gleichungsansatz schematisch in folgender Form schreiben:

$$dz = d\lambda_1(A_{11} + B_{11}) + d\lambda_2(A_{12} + B_{12}) + \cdots + d\lambda_n(A_{1n} + B_{1n})$$
$$dz = d\lambda_1(A_{21} + B_{21}) + d\lambda_2(A_{22} + B_{22}) + \cdots + d\lambda_n(A_{2n} + B_{2n})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$dz = d\lambda_1(A_{n1} + B_{n1}) + d\lambda_2(A_{n2} + B_{n2}) + \cdots + d\lambda_n(A_{nn} + B_{nn}).$$

Da $k(s)$ eine Form 1. Grades in $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ und μ ist, so sind die Ausdrücke A Formen 2. Grades. Die Ausdrücke B setzen sich zusammen aus Formen höheren, mindestens vierten Grades in $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ und μ.

Für ein Extremum der Funktion z muß $dz = 0$ werden; dz kann aber nur verschwinden, wenn die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \cdots A_{1n} + B_{1n} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \cdots A_{2n} + B_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1} + B_{n1} & A_{n2} + B_{n2} \cdots A_{nn} + B_{nn} \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Aus dieser Darstellungsform geht hervor, daß die Determinante Δ sich zusammensetzt aus Formen, deren niedrigste Ordnung in $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ und μ $2n$ ist. Diese Form niedrigster Ordnung ist die Determinante

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_{11} A_{12} \cdots A_{1n} \\ A_{21} A_{22} \cdots A_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1} A_{n2} \cdots A_{nn} \end{vmatrix};$$

alle anderen Glieder sind von mindestens $(2n+2)$ter Ordnung in $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ und μ. Da die Anzahl der Variablen in dem Ausdruck Δ eine endliche ist, so kann die Determinante Δ in der Umgebung der Stelle

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \mu = 0$$

nur verschwinden, wenn die Glieder niedrigster Ordnung, also die Determinante Δ_1 eine „indefinite“ Form bilden.*) Dieser Schluß hätte ohne Einführung des Parameters μ nicht gemacht werden können. (Vgl. oben § 3!)

Es läßt sich aber zeigen, daß die Determinante Δ_1 wesentlich positiv und also eine „definite“ Form ist.

Führen wir nämlich für die A ihren Wert ein, setzen aber

$$\psi_\nu(s) \cdot k_n(s) = \varphi_\nu(s) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n),$$

so erhält die Determinante Δ_1 folgendes Aussehen:

---

*) Vgl. Stolz „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung“, erster Teil, V Abschnitt B — Leipzig 1893.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \int_I \varphi_1^2(t)\,dt & \int_I \varphi_1(t)\varphi_2(t)\,dt & \dots & \int_I \varphi_1(t)\varphi_n(t)\,dt \\ \int_I \varphi_2(t)\varphi_1(t)\,dt & \int_I \varphi_2^2(t)\,dt & \dots & \int_I \varphi_2(t)\varphi_n(t)\,dt \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_I \varphi_n(t)\varphi_1(t)\,dt & \int_I \varphi_n(t)\varphi_2(t)\,dt & \dots & \int_I \varphi_n^2(t)\,dt \end{vmatrix}.$$

Bekanntlich ist aber diese Determinante stets positiv, und sie kann nur null werden, wenn die Funktionen φ linear abhängig sind oder eine derselben null wird.*) Wären aber die Funktionen φ linear abhängig, so wären es auch die Funktionen ψ, was nicht der Fall ist. Null könnte eine der Funktionen φ nur werden, wenn ein ψ null wäre, oder wenn $k_n(s)$ verschwände. Daß das letzte *nicht* der Fall ist, geht aus der oben S. 16 über den Ausdruck $\lambda\psi(s) + \mu q(s)$ gemachten Bemerkung hervor.

Wir können somit unter der Voraussetzung, daß die Funktion $v(s)$ *in der Form* $\mu \cdot v_1(s)$ *gegeben ist*, ganz allgemein aussprechen, daß wir für die eingeführten Parameter λ immer nur ein reelles Wertsystem erhalten, und daß daher auch unsere *Integralgleichung II nur eine einzige reelle Lösung* $u(s)$ *hat für hinreichend kleine Werte von* μ.

Schlußbemerkung: Die gesamten Betrachtungen der vorangehenden Paragraphen behalten ihre Gültigkeit bis auf unwesentliche Abweichungen, wenn wir in der Differentialgleichung I an Stelle der Funktion $\sin\mathrm{hyp}\, u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots$ eine Funktion $\varphi(u)$ eingeführt hätten, die folgende Eigenschaften hat: $\varphi(u)$ muß entwickelbar sein in der Form

$$a_0 u + a_1 u^3 + u^4 \mathfrak{P}(u),$$

wobei $\mathfrak{P}(u)$ eine Potenzreihe bedeutet und a_0 und a_1 ungleich 0 sein müssen, a_0 positiv. In der Tat haben wir von unserer Potenzreihe stets nur Gebrauch gemacht bis zu dem Gliede 3-ter Ordnung, während die Glieder höherer Ordnung für unsere Untersuchungen unwesentlich waren.

§ 8.

Weitere Diskussion der Verzweigungsgleichungen im Falle zweier Nullösungen.

Spezialisieren wir den Fall der letzten beiden Paragraphen dahin, daß wir das Vorhandensein von nur zwei Nullösungen annehmen, so kann man

*) Vgl. etwa E. Fischer „Archiv der Mathematik und Physik", dritte Reihe, 13. Bd. S. 39, Leipzig und Berlin 1908. — Hätten wir nur zwei Nullösungen, so wäre unsere Determinante zweireihig; dann würde schon aus der Schwarzschen Ungleichung ihre definite Form folgen.

nach Einführung des Parameters μ den Gleichungen (11) des § 6 (Verzweigungsgleichungen!) folgende Form geben:

(1a) $0 = a_1\mu + a_{30}\lambda_1^3 + a_{03}\lambda_2^3 + 3a_{21}\lambda_1^2\lambda_2 + 3a_{12}\lambda_1\lambda_2^2 + 3a_{20}\lambda_1^2\mu + 3a_{02}\lambda_2^2\mu + 3a_{10}\lambda_1\mu^2 + 3a_{01}\lambda_2\mu^2 + 6a_{11}\lambda_1\lambda_2\mu + a_{00}\mu^3 +$ Glieder höherer Ordnung;

(1b) $0 = b_1\mu + b_{30}\lambda_1^3 + b_{03}\lambda_2^3 + 3b_{21}\lambda_1^2\lambda_2 + 3b_{12}\lambda_1\lambda_2^2 + 3b_{20}\lambda_1^2\mu + 3b_{02}\lambda_2^2\mu + 3b_{10}\lambda_1\mu^2 + 3b_{01}\lambda_2\mu^2 + 6b_{11}\lambda_1\lambda_2\mu + b_{00}\mu^3 +$ Glieder höherer Ordnung.

Dabei ist

$$a_1 = \int_I \psi_1(s)v(s)ds; \qquad b_1 = \int_I \psi_2(s)v(s)ds,$$

$$a_{30} = \frac{1}{3!}\int_I \psi_1^4(s)ds; \qquad b_{03} = \frac{1}{3!}\int_I \psi_2^4(s)ds,$$

woraus hervorgeht, daß weder a_{30} noch b_{03} verschwinden können. Bei der Diskussion dieser Gleichungen haben wir 3 Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $\qquad a_1 \neq 0; \qquad b_1 \neq 0.$

Aus Gleichung (1a) entwickeln wir μ

$$-\mu = \lambda_1^3\frac{a_{30}}{a_1} + \lambda_2^3\frac{a_{03}}{a_1} + \lambda_1^2\lambda_2\frac{3a_{21}}{a_1} + \lambda_1\lambda_2^2\frac{3a_{12}}{a_1} + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Ebenso entwickeln wir μ aus (1b)

$$-\mu = \lambda_1^3\frac{b_{30}}{b_1} + \lambda_2^3\frac{b_{03}}{b_1} + \lambda_1^2\lambda_2\frac{3b_{21}}{b_1} + \lambda_1\lambda_2^2\frac{3b_{12}}{b_1} + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Durch Subtraktion erhält man:

(2) $0 = \lambda_1^3(b_1a_{30} - a_1b_{30}) + \lambda_2^3(b_1a_{03} - a_1b_{03}) + 3(b_1a_{21} - a_1b_{21})\lambda_1^2\lambda_2 + 3(b_1a_{12} - a_1b_{12})\lambda_1\lambda_2^2 +$ Glieder höherer Ordnung.

Wir beschränken uns auf den einfachsten und allgemeinsten Fall, daß die Ausdrücke $(b_1a_{30} - a_1b_{30})$ und $(b_1a_{03} - a_1b_{03})$ nicht verschwinden.

Wollen wir aus dieser Gleichung λ_2 nach Potenzen von λ_1 entwickeln, so müssen wir ebenso wie oben in § 4 vier Fälle unterscheiden. Immer erhalten wir, wenn wir von Spezialfällen absehen, drei Entwickelungen, von denen eine oder alle drei reell sind. Und zwar erhalten wir, wenn wir auch die oben als „Fall 3 und 4“ bezeichneten Spezialfälle ausschließen, Entwickelungen nach ganzen Potenzen von λ_1. Setzen wir nun diese Entwickelungen der Reihe nach in eine der beiden Verzweigungsgleichungen ein, so erhalten wir drei Gleichungen von der Form

$$0 = \mu + k_0\lambda_1^3 + k_1\lambda_1^2\mu + k_2\lambda_1\mu^2 + k_3\mu^3 + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Von diesen drei Gleichungen hat eine oder alle drei reelle Koeffizienten. Hat die Gleichung reelle Koeffizienten, so erhalten wir drei Entwickelungen

von λ_1 nach gebrochenen Potenzen von μ, von denen eine reell, die beiden anderen aber komplex werden. Hat die Gleichung aber komplexe Koeffizienten, so erhalten wir nur komplexe Entwickelungen.

Im ganzen erhalten wir also für λ_1 neun Entwickelungen, von denen eine oder drei reell, die übrigen aber komplex werden.

Führen wir nunmehr diese Entwickelungen in die entsprechenden Entwickelungen von λ_2 nach λ_1 ein, so erhalten wir auch neun Entwickelungen von λ_2 nach μ; und zwar wird die einer reellen Entwickelung von λ_1 entsprechende Entwickelung für λ_2 wieder reell, und die einer komplexen Entwickelung für λ_1 entsprechende wieder komplex.

Somit haben wir *neun Lösungspaare von* λ_1 *und* λ_2, von denen *ein oder drei Paare reell* werden. Tatsächlich hat aber der vorige Paragraph gezeigt, daß nur *ein reelles Lösungspaar* möglich ist, wir erhalten also *acht komplexe Lösungspaare.*

2. Fall: $\qquad a_1 \neq 0; \qquad b_1 = 0.$

Aus Gleichung (1a) entwickeln wir μ:

$$-\mu = \lambda_1^3 \frac{a_{30}}{a_1} + \lambda_2^3 \frac{a_{03}}{a_1} + \lambda_1^2 \lambda_2 \frac{3a_{21}}{a_1} + \lambda_1 \lambda_2^2 \frac{3a_{12}}{a_1} + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Diesen Wert von μ führen wir in (1b) ein und erhalten

$$0 = \lambda_1^3 b_{30} + \lambda_2^3 b_{03} + 3b_{21}\lambda_1^2\lambda_2 + 3b_{12}\lambda_1\lambda_2^2 + \text{Glieder höherer Ordnung in } \lambda_1, \lambda_2.$$

Teilen wir dieser Gleichung die Rolle der Gleichung (2) zu, so haben wir diesen Fall auf den ersten zurückgeführt.

Analog erledigt sich der Fall, der charakterisiert ist durch die Gleichungen:

$$a_1 = 0; \qquad b_1 \neq 0.$$

3. Fall: $\qquad a_1 = 0; \qquad b_1 = 0.$

Auch hier können wir nur den allgemeinsten Fall erledigen, ohne auf Spezialfälle einzugehen.

Fassen wir die Ausdrücke 3ten Grades in (1a) und (1b)

$$a_{30}\lambda_1^3 + a_{03}\lambda_2^3 + 3a_{21}\lambda_1^2\lambda_2 + 3a_{12}\lambda_1\lambda_2^2 + 3a_{20}\lambda_1^2\mu + 3a_{02}\lambda_2^2\mu + 3a_{10}\lambda_1\mu^2 + 3a_{01}\lambda_2\mu^2 + 6a_{11}\lambda_1\lambda_2\mu + a_{00}\mu^3$$

und

$$b_{30}\lambda_1^3 + b_{03}\lambda_2^3 + 3b_{21}\lambda_1^2\lambda_2 + 3b_{12}\lambda_1\lambda_2^2 + 3b_{20}\lambda_1^2\mu + 3b_{02}\lambda_2^2\mu + 3b_{10}\lambda_1\mu^2 + 3b_{01}\lambda_2\mu^2 + 6b_{11}\lambda_1\lambda_2\mu + b_{00}\mu^3$$

gleich Null gesetzt als Gleichungen zweier Kurven dritten Grades auf, die durch die Variable μ homogen gemacht sind, so ist der allgemeinste Fall dadurch gegeben, daß diese Kurven neun voneinander verschiedene Schnittpunkte haben.

Unter dieser Voraussetzung geht aus der Resultantentheorie hervor, daß wir aus unseren Verzweigungsgleichungen *neun verschiedene Entwickelungen nach ganzen Potenzen von μ erhalten*, und zwar ist es an sich *durchaus möglich, daß sämtliche neun Entwickelungen reell werden.* Es könnten aber auch *drei oder eine Entwickelung reell werden.*

Wir sehen also, daß das Resultat des vorigen Paragraphen, nach welchem nur eine einzige reelle Lösung zulässig ist, durchaus keine Trivialität bedeutet.

Analoge Betrachtungen für den Fall der n Nullösungen, die wir hier jedoch nicht mehr durchführen wollen, würden, wenn wir wieder nur den allgemeinsten Fall ins Auge fassen, auf 3^n *Lösungssysteme für die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ führen.* Und zwar würden, falls die Koeffizienten der in μ linearen Glieder sämtlich verschwänden, geradezu 3^n *reelle Lösungssysteme möglich* sein, während wir im vorigen Paragraphen nachgewiesen haben, daß auch hier nur *ein einziges reelles Lösungssystem zulässig* ist.

Es wäre noch zu untersuchen, welche Eigenschaften die Randfunktion $h(\sigma)$*) besitzen muß, damit die Koeffizienten der in μ linearen Glieder der Verzweigungsgleichungen verschwinden. Wir verweisen auf die Auseinandersetzungen des Paragraphen 5, dessen wörtliche Übertragung im Falle zweier Nullösungen die Bedingungen

$$\int_R h_1(\sigma) \frac{\partial \psi_1}{\partial n} d\sigma = 0$$

und

$$\int_R h_1(\sigma) \frac{\partial \psi_2}{\partial n} d\sigma = 0,$$

im Falle von n Nullösungen die Bedingungen

$$\int_R h_1(\sigma) \frac{\partial \psi_\nu}{\partial n} d\sigma = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

liefert, wobei $h(\sigma) = \mu h_1(\sigma)$ ist.

§ 9.

Ein spezielles Beispiel.

In diesem Paragraphen wollen wir auch das Gebiet Γ spezialisieren, und zwar möge Γ ein Kreis mit dem Radius R sein. Dieses Beispiel wird uns auf eindeutige Lösbarkeit, sowie auf solche Verzweigungen führen, die durch das Vorhandensein einer oder zweier Nullösungen der Integralgleichung III charakterisiert sind.

*) Es sei darauf hingewiesen, daß hier σ wieder einen Parameter und nicht das Symbol für ein Variablenpaar bedeutet!

Aus der Bemerkung zu § 1 geht hervor, daß die Integralgleichung III gleichbedeutend ist mit der Differentialgleichung

$$\Delta(u) + u = 0$$

mit der Randbedingung, daß u längs des Randes verschwindet; bei uns ist der Rand eine Kreislinie um den Nullpunkt mit dem Radius R.*)

Die Einführung von Polarkoordinaten ergibt die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} + u_1 = 0$$

mit der Randbedingung

$$u_1(R, \varphi) = 0,$$

dabei ist

$$u_1(r, \varphi) = u(x, y).$$

Setzt man die Lösung als Produkt zweier Funktionen $\psi(r)$ und $\chi(\varphi)$ an, die jede nur von *einer* Variablen abhängt, so läßt sich die Gleichung reduzieren auf die beiden folgenden:

1. $\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}\left(1 - \frac{\varkappa^2}{r^2}\right) \cdot \psi = 0$; Randbedingung $\psi(R) = 0$.
2. $\frac{d^2\chi}{d\varphi^2} + \varkappa^2 \chi = 0$.

Die allgemeine Lösung der zweiten Differentialgleichung ist

$$A_\varkappa \sin \varkappa\varphi + B_\varkappa \cos \varkappa\varphi; \qquad (\varkappa = 0, 1, 2 \cdots).$$

Die erste Differentialgleichung wird gelöst durch die Besselschen Funktionen

$$\mathfrak{J}_\varkappa(r); \qquad (\varkappa = 0, 1, 2 \cdots),$$

dabei ist

$$(1) \qquad \mathfrak{J}_n(r) = \frac{r^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{r^2}{2(2n+2)} + \frac{r^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} \cdots\right\}$$

Die Lösungen unserer Differentialgleichungen lauten:

$$(2) \qquad \begin{cases} A_\varkappa \sin(\varkappa\varphi) \cdot \mathfrak{J}_\varkappa(r) & (\varkappa = 1, 2, 3 \cdots) \\ B_\varkappa \cos(\varkappa\varphi) \cdot \mathfrak{J}_\varkappa(r) & (\varkappa = 0, 1, 2, 3 \cdots) \end{cases}$$

mit der Randbedingung

$$\mathfrak{J}_\varkappa(R) = 0,$$

was also hier eine Bedingung für den *Radius* ergibt.

Es muß noch gezeigt werden, daß außer diesen Produktlösungen keine weiteren Lösungen unserer Differentialgleichung existieren; der Kern $G(x, y; \xi, \eta)$ für unser Kreisgebiet also nur Eigenfunktionen hat von der Form $\psi_\varkappa(r) \cdot \chi_\varkappa(\varphi)$. Wir nehmen zunächst an, er habe noch andere Eigenfunktionen $\Phi_\varkappa(r, \varphi)$ $(\varkappa = 0, 1, 2 \cdots)$. Es sei dann $f(r, \varphi)$ eine beliebige

*) Vgl. Pockels: „Über die partielle Differentialgleichung $\Delta(u) + h^2 u$ und deren Auftreten in der theoretischen Physik". Leipzig, Teubner.

als Funktion von φ nach trigonometrischen als Funktion von r nach Besselschen Funktionen entwickelbare Funktion, die sich darstellen läßt in der Form:

$$f(r,\varphi) = \int_I K(r,\varphi;r',\varphi')\,p(r'\varphi')\,d\mathfrak{T}_{r',\varphi'},$$

wobei $K(r,\varphi;r',\varphi') = G(x,y;\xi,\eta)$ ist, $p(r,\varphi)$ eine beliebige stetige Funktion bedeutet; dann läßt sich $f(r,\varphi)$ in folgender Weise nach Eigenfunktionen des Kernes K entwickeln:*)

$$f(r,\varphi) = \sum_\varkappa \psi_\varkappa(r)\,\chi_\varkappa(\varphi) \int_I f(r',\varphi')\,\psi_\varkappa(r')\,\chi_\varkappa(\varphi')\,d\mathfrak{T}_{r',\varphi'},$$

$$+ \sum_\varkappa \Phi_\varkappa(r,\varphi) \int_I f(r',\varphi')\,\Phi_\varkappa(r',\varphi')\,d\mathfrak{T}_{r',\varphi'}.$$

Die Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen lautet:

$$f(r,\varphi) = \sum_\varkappa (A_\varkappa(r)\cdot\cos\varphi + B_\varkappa(r)\cdot\sin\varphi),$$

die nach Besselschen Funktionen:

$$f(r,\varphi) = \sum_\varkappa M_\varkappa(\varphi)\cdot\mathfrak{I}_\varkappa(r).$$

Sollen diese drei Entwickelungen übereinstimmen, so muß der Ausdruck

$$\sum_\varkappa \Phi_\varkappa(r,\varphi) \int_I f(r',\varphi')\,\Phi_\varkappa(r',\varphi')\,d\mathfrak{T}_{r',\varphi'}$$

identisch verschwinden. Da wir aber in unserer Entwicklung nur linear unabhängige Eigenfunktionen haben, so kann dies nur erreicht werden durch das identische Verschwinden des Integralausdrucks

$$\int_I f(r',\varphi')\,\Phi_\varkappa(r',\varphi')\,d\mathfrak{T}_{r',\varphi'}$$

für jedes $\varkappa$ oder

$$\int_I\int_I K(r,\varphi;r',\varphi')\,\Phi_\varkappa(r,\varphi)\,p(r',\varphi')\,d\mathfrak{T}_{r,\varphi}\,d\mathfrak{T}_{r',\varphi'} = 0$$

oder, weil $p(r,\varphi)$ eine *beliebige* stetige Funktion bedeutet:

$$\int_I K(r,\varphi;r',\varphi')\,\Phi_\varkappa(r,\varphi)\,d\mathfrak{T}_{r,\varphi} = 0$$

für jedes $\varkappa$. Das ist aber unmöglich, weil die $\Phi_\varkappa(r,\varphi)$ Eigenfunktionen des Kernes sein sollten.

Es existieren also nur die von uns in Gleichung (2) angegebenen Eigenfunktionen.

*) Vgl. E. Schmidt: „Entwickelung willkürlicher Funktionen“ Math. Annalen Bd. 63.

Im allgemeinen wird der Radius unseres Kreises die Randbedingung

$$\mathfrak{J}_\varkappa(R) = 0$$

nicht erfüllen, dann haben wir den Fall eindeutiger Lösbarkeit der Integralgleichung II.

Um Verzweigungen zu erhalten, müssen wir aus der Randbedingung uns Radien unseres Kreisgebietes so berechnen, daß sie gerade dieser Randbedingung genügen.

Haben wir einen solchen Radius R_0 für $\varkappa = 0$ gefunden, so haben wir sicher mindestens eine Nullösung des Kernes, nämlich $B_0 \mathfrak{J}_0(r)$; haben wir aber einen Radius R_n für $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots$ gefunden, so erhalten wir sicherlich mindestens zwei Nullösungen des Kernes, nämlich

$$A_n \cdot \sin(n\varphi) \cdot \mathfrak{J}_n(r) \quad \text{und} \quad B_n \cos(n\varphi) \mathfrak{J}_n(r).$$

Die Lösungen sind aus Tafeln zu ersehen. Der kleinste Wert von R, der die Gleichung $\mathfrak{J}_0(R) = 0$ erfüllt, sei R_{01}; R_{01} ist, wie ebenfalls aus der Tafel ersichtlich, für die nächsten Werte von $\varkappa$ keine Lösung, für größere Werte von $\varkappa$ läßt sich dies aus Gleichung (1) ableiten. Für $R = R_{01}$ ist uns somit tatsächlich ein Fall gegeben, wie wir ihn oben in den Paragraphen 2—5 behandelt haben.

Die Bedingungsgleichung für die Randfunktion $h(\sigma) = \mu \cdot h_1(\sigma)$, wie wir sie in § 5 aufgestellt haben, vereinfacht sich hier noch wesentlich. Wir hatten dort

$$\int_R h_1(\sigma) \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma = 0;$$

ψ ist bei uns $B_0 \mathfrak{J}_0(r)$. Die Normale fällt mit dem Radius zusammen, und der Radius ist bei uns konstant; außerdem setzen wir $d\sigma = R_{01} d\varphi$ und

$$h_1(\sigma) = h_2(\varphi),$$

folglich erhalten wir:

$$\int_0^{2\pi} h_2(\varphi) \left(\frac{\partial \mathfrak{J}_0(r)}{\partial r} \right)_{r = R_{01}} \cdot R_{01} d\varphi = 0.$$

Da für $r = R_{01}$ $\mathfrak{J}_0(r)$ nur eine einfache Nullstelle hat, so kann der Ausdruck $\left(\frac{\partial \mathfrak{J}_0(r)}{\partial r} \right)_{r = R_{01}}$ nicht verschwinden, wir erhalten somit

$$\int_0^{2\pi} h_2(\varphi) d\varphi = 0,$$

was gleichbedeutend ist mit der Gleichung

$$h_2(\varphi) = f(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi') d\varphi',$$

wobei $f(\varphi)$ eine beliebige stetige Funktion bedeutet.

Der kleinste Wert von r, der die Gleichung $\mathfrak{J}_1(r) = 0$ befriedigt, sei R_{11}; R_{11} ist für $\varkappa = 0$, sowie für die nächst höheren Werte von $\varkappa$ keine Lösung der Gleichung $\mathfrak{J}_\varkappa(r) = 0$, wie aus den Tafeln zu ersehen ist. Für größere Werte von $\varkappa$ folgt diese Tatsache aus Gleichung (1). Für $R = R_{11}$ haben wir somit tatsächlich den Fall zweier Nullösungen des Kernes. Diese beiden Nullösungen sind:

$$A_1 \cos(\varphi) \cdot \mathfrak{J}_1(r) \quad \text{und} \quad B_1 \sin(\varphi) \cdot \mathfrak{J}_1(r).$$

Am Schluß des Paragraphen 8 hatten wir bei Entwickelbarkeit von $u(s)$ nach ganzen Potenzen von μ für die Randfunktion $h(\sigma) = \mu h_1(\sigma)$ folgende Bedingungen:

$$\int_R h_1(\sigma) \frac{\partial \psi_1}{\partial n} d\sigma = 0 \quad \text{und} \quad \int_R h_1(\sigma) \frac{\partial \psi_2}{\partial n} d\sigma = 0.$$

In unserem Spezialfall können wir setzen

$$d\sigma = R_{11} d\varphi,$$

ferner schreiben wir

$$h_1(\sigma) = h_2(\varphi);$$

außerdem fällt der Radius mit der Normalen zusammen, führen wir für ψ_1 und ψ_2 die besonderen Werte ein, so lauten die Bedingungen

$$R_{11}\left(\frac{\partial \mathfrak{J}_1(r)}{\partial r}\right)_{r=R_{11}} \cdot \int_0^{2\pi} h_2(\varphi) \cos\varphi \, d\varphi = 0$$

und

$$R_{11}\left(\frac{\partial \mathfrak{J}_1(r)}{\partial r}\right)_{r=R_{11}} \cdot \int_0^{2\pi} h_2(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi = 0.$$

Da nun $\mathfrak{J}_1(r)$ für $r = R_{11}$ eine einfache Nullstelle hat, so kann $\left(\frac{\partial \mathfrak{J}_1(r)}{\partial r}\right)_{r=R_{11}}$ nicht verschwinden. Die Bedingungen erhalten folgende Gestalt:

$$\int_0^{2\pi} h_2(\varphi) \cos\varphi \, d\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} h_2(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi = 0$$

oder

$$h_2(\varphi) = f(\varphi) - \frac{\sin\varphi}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi') \cdot \sin\varphi' \, d\varphi' - \frac{\cos\varphi}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi') \cos\varphi' \, d\varphi'$$

$$h_2(\varphi) = f(\varphi) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi') \cdot \cos(\varphi' - \varphi) \, d\varphi',$$

wobei $f(\varphi)$ eine beliebige stetige Funktion bedeutet.

Lebenslauf.

Ich, Otto Richard Hans Falckenberg, bin am 31. August 1885 in Jena als Sohn des jetzigen k. ord. öff. Universitätsprofessors Dr. Richard Falckenberg in Erlangen und seiner Ehefrau Else geb. Pielke geboren, bin bayrischer Staatsangehörigkeit, protestantischer Konfession. Im Jahre 1889 siedelten meine Eltern nach Erlangen über; dort wurde ich zunächst privatim unterrichtet, besuchte sodann das humanistische Gymnasium, das ich im Juli 1903 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Vom Wintersemester 1903/4 bis einschließlich Sommersemester 1905 studierte ich an der dortigen Universität Jura, auch diente ich im Jahre 1903/4 beim k. bayr. 10. Feldartillerieregiment dortselbst mein Einjährigenjahr ab — in meinem Militärverhältnis bin ich jetzt Leutenant d. Res. im k. bayr. 6. Feldartillerieregiment —. Vom Wintersemester 1905/6 ab widmete ich mich dem Studium der Mathematik an den Universitäten München, Greifswald und Erlangen. Im Oktober 1908 bestand ich den ersten, im Oktober 1910 den zweiten Abschnitt der Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik. Bis November 1911 hielt ich mich zu weiterer wissenschaftlicher Ausbildung in Erlangen auf. Zur Zeit bin ich dem pädagogisch didaktischen Seminar des Theresiengymnasiums in München zugeteilt.

Allen meinen hochverehrten Lehrern bin ich für reichste wissenschaftliche Förderung zu herzlichem Dank verpflichtet; insbesondere aber den Herren Geheimrat Gordan, Professor Noether, der mir während meiner ganzen Studienzeit ein Führer und Berater gewesen ist, und Geheimrat Wiedemann in Erlangen, Prof. Erhard Schmidt, jetzt in Breslau, auch für sein reges Interesse an der vorliegenden Dissertation, und Professor Hilb, jetzt in Würzburg.

Fräulein Dr. Noether in Erlangen habe ich zu danken für die Überlassung des Themas dieser Arbeit, sowie für mannigfache Ratschläge bei dessen Bearbeitung, Herrn Professor Ernst Fischer für die liebenswürdige Bereitwilligkeit, das Referat zu übernehmen.